Действительно, что там в 2D?

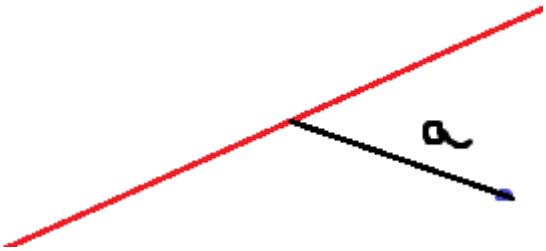
Да всё так же, но только операторная часть функции Грина другая: не $\frac{1}{4\pi r_{NM}}$, а $\frac{1}{2\pi * \ln r_{NM}}$. А в остальном то же. Конец методички ☺

Шучу, шучу, сейчас интересный рассказ будет. Перенесёмся в электрод, начало семестра. Там у нас была формула:

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \iiint\limits_{\text{по } R^3}^{\text{по } R^3} d\varphi = \iiint\limits_{\text{по } R^3}^{\text{по } R^3} \frac{\rho(\boldsymbol{r_1})}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}|} dV$$

И я сказал, что некоторые нехорошие семинаристы получают её жутким способом, через функцию Грина – чего делать не надо, есть закон Кулона. В оправдание семинаристов-теоретиков я сейчас приведу пример, где неверное использование закона Кулона привело бы к ошибке.

Задача: прямая с линейной плотностью зарядов к.



Найти потенциал на расстоянии а от прямой.

Неправильное решение: ну закон Кулона же! Так как по z объёмная плотность зарядов одинакова, можем редуцировать число измерений с 3 до 2 - рассмотреть плоскость, нормальную прямой:

А там ответ к/а. Усё ☺

В чём ошибка? Уж если мы свели задачу к плоской, то обязаны пользоваться двумерной функцией Грина, а не трёхмерной. А это не $\frac{1}{r_{NM}}$, а $\frac{2}{\ln r_{NM}}$. Таким образом, ответ $\frac{2}{\ln a}$.

Обратная пропорциональность $\frac{1}{r_{NM}}$ работает лишь в 3D, а вот уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi = r$$

работает всегда. Ну и постановке задачи на операторную часть функции Грина

$$\Delta u_N(M) = \delta(\overrightarrow{r_N} - \overrightarrow{r_M})$$

удовлетворяет именно $\frac{1}{2\pi * \ln r_{NM}}$.

Этот же ответ можно получить иначе – методами общей физики, я бы даже сказал - школьной. Вернёмся к нашей прямой:

разобьём её на кусочки dx и проинтегрируем:

$$\varphi(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{y^2 + 1}}$$

Интеграл расходится. Так что решим не в лоб, а через E:

$$E(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} * \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} * \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int_{0}^{+\infty} \frac{dx^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \frac{du}{(u + a^2)^{3/2}} = \int_{a^2}^{+\infty} \frac{dv}{v^{3/2}} = -\frac{2}{a}$$

А

$$\varphi(a) = -\int E(b)db = \frac{2}{\ln a}$$

Вот и вылез лонарифм (как я ласково называю натуральный логарифм).

В принципе выкладки выше можно считать доказательством того, что функция Грина оператора Лапласа как раз имеет вид $\frac{1}{2\pi * \ln r_{NM}}$.